SESSION DE 1975

CONCOURS A

MATHÉMATIQUES

(2e épreuve)

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 3

Matériel à prévoir par le candidat : Matériel usuel de dessin.

N. B. — *Les candidats sont invités à respecter les notations de l'énoncé et à soigner la présentation de leur copie.*

I

On considère l'équation différentielle :

(1) $$xy' + y = e^x .$$

1° Intégrer cette équation pour $x \neq 0$.

Montrer qu'il existe une solution unique f_0 de (1) telle que la limite $\lim_{x \to 0} f_0(x)$ soit finie. Préciser f_0.

2° On complète la définition de f_0 en posant $f_0(0) = 1$. f_0 est-elle continue? f_0 est-elle dérivable?

3° Étudier les variations de f_0 et la représenter graphiquement.

On sera amené à étudier le signe de $u(x) = e^x (x - 1) + 1$.

4° Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de f_0, pour tout entier $n \geqslant 0$.

II

On définit une application g_0 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ en posant :

$$g_0(x) = \frac{x}{e^x - 1} \qquad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad g_0(0) = 1.$$

1° Montrer que g_0 admet, pour tout entier $n \geqslant 0$, un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et expliquer comment ce développement pourrait être obtenu à partir du développement limité de f_0 (*on ne demande pas d'effectuer le calcul*).

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose :

$$g_0(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + x^n r_n(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} r_n(x) = 0.$$

a. Calculer a_0 , a_1 , a_2 et a_3.

b. Montrer qu'il existe un réel a, unique, tel que si on pose $h(x) = g_0(x) - ax$ on ait $h(-x) = h(x)$ pour tout x; déterminer a.

c. Que peut-on en conclure pour a_{2p+1} , $p \geqslant 1$?

3° En remarquant que $f_0(x)\, g_0(x) = 1$ établir une relation de récurrence entre a_n et les coefficients a_k , $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Utiliser cette relation pour calculer a_4 et a_6.

III

Pour tout nombre réel t on pose $g_t(x) = e^{tx}\, g_0(x)$.

1° Établir les deux relations :

$$g_{1-t}(x) = g_t(-x) \,. \tag{2}$$

$$g_{\frac{t+1}{2}}(x) + g_{\frac{t}{2}}(x) = 2\, g_t\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3}$$

2° En utilisant le développement limité de g_0 et celui de e^{tx} montrer que g_t admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n de la forme :

$$g_t(x) = \sum_{k=0}^{k=n} A_k(t)\, x^k + x^n R_n(x) \qquad \text{avec} \lim_{x \to 0} R_n(x) = 0$$

et où $A_k(t)$ est donné par la relation :

$$A_k(t) = \sum_{p=0}^{p=k} a_{k-p} \frac{t^p}{p!} \,.$$

3° *a.* Montrer que $A'_k(t) = A_{k-1}(t)$.

b. En utilisant (2) et (3) établir les relations :

$$A_k(1-t) = (-1)^k A_k(t) \,. \tag{4}$$

$$A_k\left(\frac{1+t}{2}\right) + A_k + \left(\frac{t}{2}\right) = 2^{1-k} A_k(t) \,. \tag{5}$$

4° *a.* Montrer que si k est impair $\quad A_k(0) = A_k(1) = A_k\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

b. Montrer, par récurrence que A_{2p} s'annule deux fois sur [0,1] et étudier les variations de $A_k(t)$ pour $t \in [0\,.\,1]$.

On sera amené pour cette étude à distinguer les quatre cas : $k = 4p$, $k = 4p + 1$, $k = 4p + 2$, $k = 4p + 3$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail